Varieties which have two projective bundle structures

佐藤, 栄一

代数幾何学シンポジウム記録
1983年度 pp.87-95

Varieties which have two projective bundle structures

九州大教養 佐藤栄一

基礎体 k は代数的閉体とする。M と M_i $(i=1.2)$ は k 上代数多様体とし、$p : M \to M_1$, と $q : M \to M_2$ を proper surjective morphism ですべての closed fiber of p (又 q) を P^r (又 P^s) と同型とする。

定義: M が two projective bundle structures $(M_1, P^r, p; M_2, P^s, q)$ をもつ $\Longleftrightarrow$ 上記の M_1, M_2 と morphism p, q があって $\dim \Phi(M) > \max\{\dim M_1, \dim M_2\}$ をみたす。(Φ は p, q から誘導される morphism $M \to M_1 \times M_2$ である。)

これらの記号の下に2つの定理を示す。

<u>定理A</u> M は非特異射影多様体で上記の束構造 $(P^l, P^r, p; P^m, P^s, q)$ をもつとする。その時,

a) $l=s$ かつ $m=r$ で $M \cong P^l \times P^m$ 又は

b) $l=m=r+1=s+1$ で $M \cong \mathbb{P}(T_{P^l})$ (T_{P^l} は P^l 上接束)

のいずれかをみたす。

<u>定理B</u> M は $\mathrm{char}\, k = 0$ の非特異射影 3-fold とする。M は上記の束構造をもち, M_1, M_2 を非特異曲面とする。その時

a) $M \cong M_1 \times_C M_2$ (C は非特異完備代数曲線で, M_i は C 上 P^1-bundle)

b) $M \cong \mathbb{P}(T_{P^2})$ で $M_i \cong P^2$.

のいずれかが成立。

まず定理Aの証明をする。

<u>Lemma 1</u> M, S を非特異射影多様体で morphism $p : M \to S$ の closed fiber は P^r に同型とする。その時 p は étale top で P^r-bundle である。さらに S が 1) $\dim S = 1$ 又は 2) 有理曲面又は 3) 射影空間なら, p は Zariski top で P^r-bundle であり S 上階数 $(r+1)$ のベクトル束 E の $\mathbb{P}(E)$ から induce される。

[5] の定理 0.1 ，[6] の lemma 1.2 を見よ。

上記の２つの束構造の定義の後半の条件について

Lemma 2 ，M, M_1, M_2, Φ は上記のものとする。その時，次は同値である。

1) $\dim \Phi(M) = \max\{\dim M_1, \dim M_2\}$

2) $\dim \Phi(M) = \dim M_1 = \dim M_2$

3) $\sigma p = q$ なる同型 $\sigma : M_1 \simeq M_2$ が存在.

上の２つの lemma より Th A を示すために，次のように考えることができる。

E_1 を P^l 上の rank $(r+1)$ のベクトル束，E_2 を P^m 上の $(s+1)$ のベクトル束とし，p, q を $P(E_1) \to P^l$, $P(E_2) \to P^m$ の canonical 射影とし，M は $P(E_1)$ と $P(E_2)$ に同型とし，$\dim \Phi(M) > \max(l, m)$ とする。そして chern class から M についての情報を得る。

[記号]

$\xi = \mathcal{O}_{P(E_1)}(1)$, $\eta = \mathcal{O}_{P(E_2)}(1)$, $h = p^*\mathcal{O}_{P^l}(1)$, $\kappa = q^*\mathcal{O}_{P^m}(1)$.

$\mathrm{Pic}\, M \simeq \mathbb{Z}\xi + \mathbb{Z}h \simeq \mathbb{Z}\eta + \mathbb{Z}\kappa$ より

(3) $\eta = a\xi + bh$, $\kappa = \bar{a}\xi + \bar{b}h$ で $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ は整数。

Lemma 4 ， $\bar{a} > 0$, $\bar{a}b - a\bar{b} = 1$

証) f_p を p の fiber $(\simeq P^r)$ とする。$(\kappa \cdot f_p \cdot \xi^{r-1}) = \bar{a}(\xi^r \cdot f_p) + \bar{b}(h \cdot f_p \cdot \xi^{r-1})$ より，仮定は $\bar{a} > 0$ を導く。一方 $\xi = c\eta + d\kappa$, $h = \bar{c}\eta + \bar{d}\kappa$ $(c, \bar{c}, d, \bar{d} \in \mathbb{Z})$ とする時 $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{a} & \bar{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $\bar{c} > 0$ を得る。これより $\bar{a}b - a\bar{b} = 1$ を得る。 q.e.d.

$A^r(S)$ = group of cycles of codim r on a non-singular variety S modulo rational equivalence

$A(S) = \bigoplus_{r=0}^{\dim S} A^r(S)$

E を非特異多様体 Z 上 rank r のベクトル束とし，σ を E の tautological line bundle とし $c_i(E)$ を E の i 次 Chern class とする。その時よく知られた次の定理がある。

<u>定理 5.</u> 上の記号の下で $f: P(E) \to Z$ を canonical 射影とする。その時 f^* によって $A(P(E))$ は $1, \sigma, \ldots, \sigma^{r-1}$ を基とする $A(Z)$ 上自由加群になり，次の等式が成立。

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i f^* c_i(E)\, \sigma^{r-i} = 0 \quad \text{in } A^r(P(E)).$$

上の定理より，M の Chow ring を E_1, E_2 の chern 類を使って調べる。$c_i(E_1) = c_i h^i$，$c_j(E_2) = d_j k^j$（c_i, d_j は整数，$1 \le i \le \min(l, r+1) = e$，$1 \le j \le \min(m, s+1) = f$），次のような Z 上 graded な finite algebra の同型を考える。

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z}[X,Y]/(Y^{l+1}, X^{r+1} - c_1X^rY + c_2X^{r-1}Y^2 + \cdots + (-1)^e c_e X^{r+1-e}Y^e) \\ (6)\quad &\cong \mathbb{Z}[U.V]/(V^{m+1}, U^{s+1} - d_1U^sV + \cdots + (-1)^f d_f U^{s+1-f}V^f) \end{aligned}$$

さらに次の条件が付く。

$U = aX + bY$，$V = \bar{a}X + \bar{b}Y$，$\bar{a} > 0$　$\bar{a}b - a\bar{b} = 1$，U, V, X, Y は不定元。

以後 $f(X,Y) = \sum_{i=0}^{e} c_i X^{r+1-i}Y^i$ $(c_0 = 1)$，$g(U.V) = \sum_{j=0}^{f} d_j U^{s+1-j}V^j$ $(d_0 = 1)$，$I = (Y^{l+1}, f(X,Y))$，$J = (V^{m+1}, g(U.V))$ とおく。

(7)　$l \geqq m$ と以後仮定。

(6) について I, J の minimal generator に関する議論より l, m, r, s は次のような関係をもつ。

(8, a)　$l < r$，$l = m$，$r = s$

(8. b)　$l = r = m = s$

(8, c)　$l > r$，$l = s$，$m = r$

(8, d)　$l > r$，$l = m$，$r = s$.

以後 $\bar{a} = 1$ を求めることが，重要であるが，その前に一つの lemma を述べる。

Lemma 9　定理 A の条件の下で $\bar{a} = 1$ を仮定する

その時 (8, b) (8, c) の場合 $\Phi: M \to P^{\ell} \times P^{m}$ は同型である。(8, d) の場合は $\ell = r+1$ の仮定を加えると、Φ は closed immersion で、$\Phi(M)$ は $P(T_{P^{\ell}})$ に同型になる。

略証) (8.b), (8.c) は Φ は finite birational morphism であることより同型になる。後半も Φ は $M \to \Phi(M) (\subseteq P^{\ell} \times P^{\ell})$ は finite birational morphism。一方 $\Phi(M)$ は $P^{\ell} \times P^{\ell}$ ($x_0, \cdots x_{\ell}, y_0, \cdots y_{\ell}$ を同次座標系におく) において $f(x_0, \cdots, x_{\ell}, y_0, \cdots y_{\ell}) = 0$ で定義される (f は (x_i), (y_j) に関し、同次多項式)。$\bar{a} = 1$ なる仮定より、f は (x), (y) に関し、次数が 1 をえる。($\bar{c} = 1$ in lemma 4)。これより (x), (y) についての線型変換をすることにより又、p, q の各 fiber ($\simeq P^{\ell-1}$) は底空間 (P^{ℓ}) の超平面であることに注意すると $\Phi(M)$ は $\sum_{i=0}^{\ell} x_i y_i = 0$ で表わされる。 q.e.d

上の lemma 9 より Th. A を示すには、次を示せばよい。

イ) $\bar{a} = 1$.

ロ) $\bar{a} = 1$ かつ 8, d) $\Longrightarrow$ $m = r+1$

まず イ) を示す

(8, a) が起り得ないことは明らか。$P^{r} \to P^{m}$ ($r > m$) の morphism は定数写像しかないことが理由。

(8, b) (6) より $(\bar{a}x + \bar{b}y)^{\ell+1} = Af(x, y) + By^{\ell+1}$ (A, B 整数)

故に $A = \bar{a}^{\ell+1}$, $B = \bar{b}^{\ell+1}$. $f(x, y) = (x + \bar{b}y/\bar{a})^{\ell+1} - (\bar{b}y/\bar{a})^{\ell+1}$.

$x^{\ell}y$ の係数は $(\ell+1)\bar{b}^{\ell}/\bar{a}^{\ell}$。一方 $\bar{a}b - a\bar{b} = 1$ より $\bar{a}$, $\bar{b}$ は互いに素。

故に $\bar{a}^{\ell} | \ell+1$ より $\bar{a} = 1$.

(8, c) $(\bar{a}x + \bar{b}y)^{r+1} = Af(x, y)$ ($A \in \mathbb{Z}$)。故に $(x + \bar{b}y/\bar{a})^{r+1} \in \mathbb{Z}[x, y]$

$\bar{b} = 0$ なら $\bar{a}b - a\bar{b} = 1$ より $\bar{a}b = 1$ ∴ $\bar{a} > 0$ より $\bar{a} = 1$

$\bar{b} \neq 0$ なら $(\bar{a}, \bar{b}) = 1$ より $\bar{a} = 1$.

(8.α)については次が重要

<u>定理</u> 9　σを原始の巾根とする。Aを $Q(\sigma)$ の整数環とする。

その時　$A = \bigoplus_{(i,n)=1} \mathbb{Z}\sigma^i$　（$i=0$は含む）

　[4]の定理4を見よ。

系 10.　$\Phi_n(x)$　$(n \geqq 3)$を円周等分多項式，α, βを整数とする。$\alpha^{\Phi(n)}$が$\Phi_n(\alpha x+\beta)$を$Z[x]$で割ると仮定する。（$\Phi(n)$はnのEuler数）その時　$\alpha = \pm 1$である。

(6)より次の等式を得る。

(11.1)　$V^{m+1} = AY^{m+1} + f(x, y)\bar{f}(x, y)$

(11.2)　$Y^{m+1} = BV^{m+1} + g(U, V)\bar{g}(U, V)$

　$\bar{f} \in Z[X, Y]$　$\bar{g} \in Z[U, V]$　A, B整数　$\deg \bar{f} = \deg \bar{g} \geqq 1$

Step I　$A = B = 1$ or -1

証）$(11.1) \times B + (11.2)$より

　$Y^{m+1} = ABY^{m+1} + Bf\bar{f} + g\bar{g}$。

　一方 $\deg f = \deg g$ より　$g(U, V)$をX, Yで書き表わすと，

$g(U, V) = g(ax+by, \bar{a}x+\bar{b}y) = g(a, \bar{a}) f(x, y)$。

　故に $Y^{m+1}(1-AB) = f(x, y)(B\bar{f}(x, y) + g(a, \bar{a})\bar{g}(ax+by, \bar{a}x+\bar{b}y))$

より　$AB = 1$をえる。　q.e.d

$\bar{a} = 1$を得るために　次の2つの場合にわける。

(12.1)　mが奇数かつ　$v = 1$

(12.2)　上記以外

　(12.2)の時を先に調べる。

Step II　(12.2)の時　$\bar{a} = 1$

証）$A = 1$とする。(11.1)において$V = \bar{a}x+\bar{b}y$とし，$y=1$とおく。

　$(\bar{a}x+\bar{b})^{m+1} - 1 = f(x, 1)\bar{f}(x, 1)$。この両辺を$\mathbb{Z}[X]$において素因数分解する。まず左辺は$\Phi_j(\bar{a}x+\bar{b})$の積に分解する。

(但し $\Phi_j(x)$ は円周等分多項式)。$\Phi_j(\bar{a}x+\bar{b})$ は $Q[X]$で既約であることに注意する。その時 左辺の因数 $\Phi_u(\bar{a}x+\bar{b})$ と $f(x,1)$の因数 $f_v(x)$ があって $\deg \Phi_u(\bar{a}x+\bar{b}) = \deg f_v(x) \geqq 2$ である。さらに $\Phi_u(\bar{a}x+\bar{b}) = \bar{a}^{\phi(u)} f_v(x)$ をえる。それ故，系 10 より，$\bar{a} = 1$ を得る。$A=-1$ の時も上と同じ議論で示される。 q.e.d

次に上の ロ) $\bar{a}=1$ かつ 8. d) $\Rightarrow$ $l=r+1$ を示す.
この証明のためには sheaf 理論，特に Chern 類を使う。
まず次の M 上の完全列を考える。

$$(13)_p \qquad 0 \to T_p \xrightarrow{i} T_M \xrightarrow{j} p^* T_{P^m} \to 0$$
$$(13)_q \qquad 0 \to T_q \xrightarrow{\bar{i}} T_M \xrightarrow{\bar{j}} q^* T_{P^m} \to 0$$

T_M は M の接束，T_p は p に関する相対接束．
この完全列をそれぞれ p の fiber に制限すると次を得る。

Lemma 14.

$$0 \to T_{P^r} \xrightarrow{i_p} T_M|_{P^r} \to \mathcal{O}_{P^r}^{\oplus m} \to 0$$
$$0 \to T_q|_{P^r} \to T_M|_{P^r} \xrightarrow{\bar{j}_p} T_{P^r} \oplus \mathcal{O}_{P^r}(1)^{\oplus m-r} \to 0 \text{。}$$

さらに上の完全列は split する。

証) P^u を P^v の linear subspace とする。その時 $T_{P^v}|_{P^u} = T_{P^u} \oplus \mathcal{O}(1)^{v-u}$.
又 $H^1(P^r, T_{P^r}) = 0$ より Lemma は明らか。 q.e.d

Lemma 15 合成写像 $i_p \circ \bar{j}_p$ は bundle map として injective.
それ故 $i \circ \bar{j} : T_p \to q^* T_{P^m}$ は bundle map として injective.
同様に $\bar{i} \circ j : T_q \to p^* T_{P^m}$ も injective.
証明) $\mathrm{Hom}(T_{P^r}, T_{P^r}) \cong k$ と $\mathrm{Hom}(T_{P^r}, \mathcal{O}(1)) = 0$ より明らか。

Lemma 15 より次の M 上の完全列をえる。

$$0 \to T_p \oplus T_q \xrightarrow{(i,\bar{i})} T_M \longrightarrow A \longrightarrow 0 \text{。}$$

A は $q^* T_{P^m} / i\bar{j}(T_p)$，$p^* T_{P^m} / \bar{i} j\, T_q$ に同型であることに注意
これより A についての次の系をえる。

系 16. p の fiber $(=f_p)$ に対して $A|_{f_p} \cong \mathcal{O}_{P^r}(1)^{\oplus m-r}$. 同様に q の fiber $(=f_q)$ に対し, $A|_{f_q} \cong \mathcal{O}_{P^r}(1)^{\oplus m-r}$. それ故 A は $q^*\mathcal{O}_{P^m}(1)\otimes p^*A_p$ と $p^*\mathcal{O}_{P^m}(1)\otimes q^*A_q$ に同型である (A_p と A_q は P^m 上の階数 $m-r$ のベクトル束である。)

略証) base change Theorem よりわかる。

次の2つの case にわける

(17.1) $m > 2r$

(17.2) $m \leq 2r$

さらに次の完全列を考える。

$(18)_p$ $0 \to \xi\otimes \check{T}_p \to p^*E_1 \to \xi \to 0$

$(18)_q$ $0 \to \eta\otimes \check{T}_q \to q^*E_2 \to \eta \to 0$

さらに E_1, E_2 について次のような仮定をおく。

仮定. $E_1 = p_*q^*k$, $E_2 = q_*p^*h$ (つまり $\bar{a}=b=1$, $a=\bar{b}=0$)

これは $\bar{a}=1$ $\bar{c}=1$ よりこれが可能である。

Lemma 19. $c_1(E_1) = (m-r)h$ $c_1(E_2) = (m-r)k$

Claim (17.1) は起りえない。

略証) $f(x,1)$ $(= x^{r+1} - c_1x^r + \quad)$ は $x^{m+1}-1$ の約数。故に $|c_1| \leq r$。一方 lemma 19 より $c_1 = m-r > r$。矛盾

次は (17.2) について考える。次の完全列について既にしっている。 $0 \to T_p \to q^*T_{P^m} \to A \to 0$。

これに $q^*\mathcal{O}_{P^m}(-1)$ を tensor する。一方 $T_{P^m}(-1)$ は $(m+1)$ 個の section で生成される。それ故

$0 \to (\text{sub bundle} = B) \to \overset{m+1}{\oplus}\mathcal{O}_M \to p^*A_p \to 0$ を得る。

この列に対して $R^\cdot p_*$ をとることにより

$0 \to p_*B \to \overset{m+1}{\oplus}\mathcal{O}_{P^m} \to A_p \to 0$ をえる。

系16, $m \leq 2r$ より $c_i(A_p) = {}_{m-r}C_i \quad (1 \leq i \leq m-r)$.
故に $c(\overset{m+1}{\oplus}\mathcal{O}_{P^m}) = c(P \times B)\, c(A_p)$ より $m-r=1$.
これより次を得る。

Lemma 20. $\bar{a}=1$ かつ 8, d) $\Rightarrow$ $n = r+1$.

Th A の証明を完結するためには, (12.1) の case が起りえないことを示す必要がある。それは $(13)_p$, $(13)_q$, $(18)_p$ $(18)_q$ を利用ししたら容易に矛盾が出る。これ故 Th A が示された。 q.e.d

次に Th B の略証を述べる。

Lemma 21 Y, Z が非特異射影曲面とし, $f: Y \to Z$ を surjective morphism, Y を geometrically ruled surface (以後 g.r.s と略記する) とする。その時, Z は, g.r.s 又は P^2 である。

証明は容易

Lemma 22. Th B の条件の下で, M_1, M_2 は g.r.s 又は P^2。

次に M_2 を g.r.s と仮定する。その時 $\bar{q}: M_2 \to C$ を canonical 射影とする。C の点 λ の fiber を $l_\lambda (= \bar{q}^{-1}(\lambda) \cong P^1)$ とせよ。
注意: $q^{-1}l_\lambda \to M_1$ が surjective なる点 λ があれば, C のすべての点 μ に対し, $p: q^{-1}l_\mu \to M_1$ は surjective.

それ故, 2つの case に分けて考える

(23.A) $\forall \lambda \in C \Rightarrow p(q^{-1}l_\lambda)$: curve

(23.B) $\forall \lambda \in C \Rightarrow p(q^{-1}l_\lambda) = M_1$

Lemma 24 (23.A) の場合, M は $M_1 \times_C M_2$ に同型である。但し M_i $(i=1.2)$ は C 上 ruled 曲面である。

この Lemma を示すために次を利用すれば容易に示せる。

Proposition 25 ϕ $F_n = \mathrm{Proj}(\mathcal{O}_{P^1} \oplus \mathcal{O}_{P^1}(n))$ $(\phi: F_n \to P^1)$ とせよ
C を F_n 上既約曲線で, $\phi: C \to P^1$ を finite map で, $C^2 = 0$ とせ

よ。その時 $n=0$ かつ C は Φ の section である。

Lemma 26, (23, β) の場合 M は $M_1 \times C$ に同型である。但し M_1 は有理 g.r.s であり, C は g.r.s M_2 の base curve P^1 である。

M_2 が P^2 の場合は, 同時に M_1 も P^2 になり Th A よりわかる。故に Th. B の証明は完了する。

引用文献

1) Artin. M and Mumford. D, Some elementary examples of unirational varieties which are not rational, Proc. London Math Soc, 25 (1972) 75-95

2) Grothendieck, A. La theorie des classes de Chern, Soc. Math de France 86 (1958), 137-154

3) ————————, Le groupe de Brauer I. Seminaire Bourbaki, Expose 290 (1965)

4) Lang, S., Algebraic number theory, Addison-Wesley. Reading, 1970

5) Maruyama. M., On classification of ruled surfaces 紀国屋書店

6) ————————, On a family of algebraic vector bundles, Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative algebra, in honor of Akizuki, 紀国屋書店 (1973)

7) Milne, J. Étale cohomology, Princeton University Press, Princeton